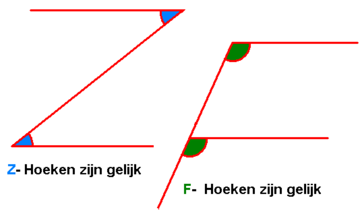
PARAGRAAF 3.1 : GELIJKVORMIGHEID

LES 1 SNAVEL- EN ZANDLOPERFIGUREN

DEFINITIE GELIJKVORMIGHEID

- Twee driehoeken zijn gelijkvormig als twee hoeken gelijk zijn.
- Notatie : $\triangle ABC \propto \triangle PQR$
- D.w.z. dat $\angle A = \angle P$; $\angle B = \angle Q$; $\angle C = \angle R$. (Dus let op de volgorde !!!)
- Om zijden te berekenen maak je een gelijkvormigheidsschema :

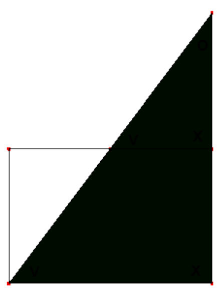
AB = …	AC = …	BC = …
PQ = …	PR = …	QR = …



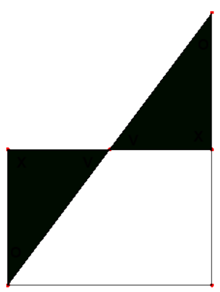
DEFINITIES SNAVEL EN ZANDLOPER

- F-hoeken en Z-hoeken
- Je kunt deze figuren alleen gebruiken in de figuur twee lijnen evenwijdig lopen

(1) Snavel

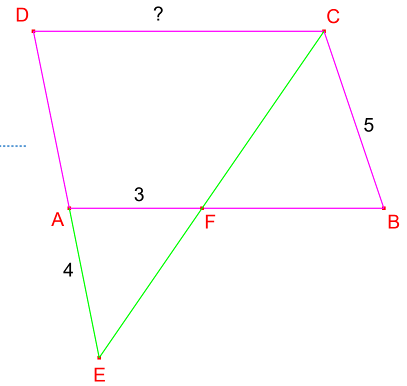


(2) Zandloper



VOORBEELD 1

Vierhoek ABCD is een paralellogram. Bereken CD.



OPLOSSING 1

(1) Δ ECD ~ ΔEFA
(2)

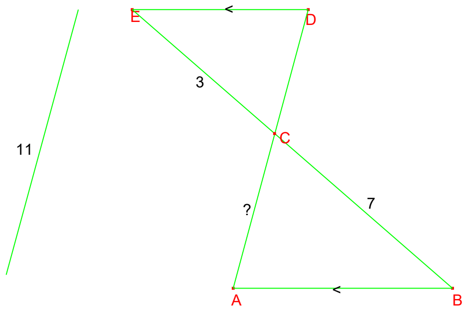
ΔECD	EC = X	CD = ?	ED = 9
ΔEFA	EF = X	FA = 3	EA = 4

(3) CD = $\frac{3 \cdot 9}{4} = 6\frac{3}{4}$

VOORBEELD 2

Zie de snavelfiguur. Bereken AC.

OPLOSSING 2



Als het gevraagde lijnstuk niet te berekenen

is, noem deze dan x

(1) Δ ABC ~ ΔDEC
(2)

ΔABC		AB = x	BC = 7	AC = ?
ΔDEC		DE = x	EC = 3	DC =

Stel $AC = x$, dan is $DC = 11 - x$

(3) $7(11 - x) = 3x$

$$77 - 7x = 3x$$

$$-10x = -77$$

$$x = 7{,}7$$

LES 2 : GONIOFORMULES

DEFINITIES

- $\sin(\angle A) = \frac{Overstaande}{Schuine} = \frac{O}{S}$
- $\cos(\angle A) = \frac{Aanliggende}{Schuine} = \frac{A}{S}$
- $\tan(\angle A) = \frac{Overstaande}{Aanliggende} = \frac{O}{A}$
- Een ezelsbruggetje om dit te onthouden is : ***CasSosToa***

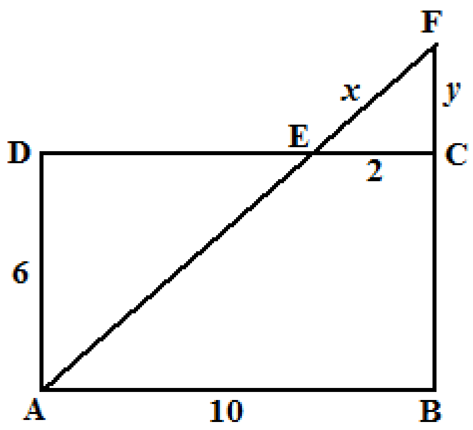
VOORBEELD 1

Gegeven is rechthoek ABCD met uitbreiding.

a. Bereken $\angle A$

b. Toon aan dat $\triangle ADE$ en $\triangle EFC$ gelijkvormig zijn.

c. Bereken y en x



ABCD is een rechthoek

OPLOSSING 1

a. $\tan(\angle A) = \frac{DE}{AD} = \frac{8}{6}$

$\angle A = 53$

b. $\angle A = \angle F\ (Z - hoek)$

$\angle D = \angle C = 90$

Dus $\triangle ADE \propto \triangle ECF$

c. Maak een gelijkvormigheidsschema.

AD = 6	AE =	DE = 8
EC = 2	EF = x	CF = y

(1) Je kunt nu berekenen dat $y = \frac{8 \cdot 2}{6} = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}$

(2) Om x te berekenen moet je eerst Pythagoras doen :

$AE^2 = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$

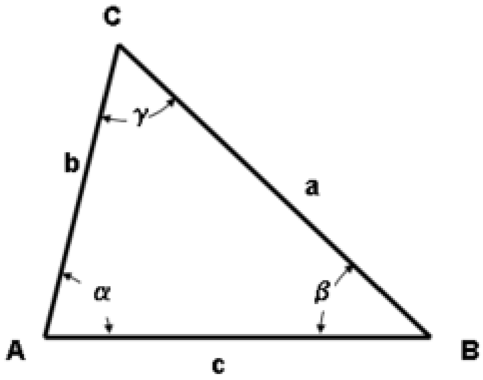
(3) Vul in :

AD = 6	AE =10	DE = 8
EC = 2	EF = x	CF = y

Je kunt nu berekenen dat $x = \frac{10 \cdot 2}{6} = \frac{20}{6} = 3\frac{1}{3}$

PARAGRAAF 3.2 : DE SINUSREGEL

Er zijn twee belangrijke regels waarmee je in niet-rechthoekige driehoeken de zijden en hoeken van een driehoek kunt berekenen. In deze paragraaf leer je de sinusregel.



REGEL 1 : DE SINUSREGEL

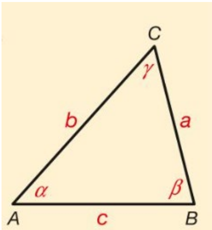
- a= BC b=AC c = AB (de letter die er niet in zit)
- $\angle A = \alpha \quad \angle B = \beta \quad \angle C = \gamma$
- Dan geldt de sinusregel :

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\sin(\alpha)} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin(\beta)} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin(\gamma)}}$$

VOORBEELD 1

Gegeven is ΔABC met b = 10, β = 66° en γ= 73°.

Bereken a en c in één decimaal nauwkeurig.



OPLOSSING 1

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

(1) α = 180 – 66 – 73 = 41°

(2) $\frac{a}{\sin 41} = \frac{10}{\sin 66} = \frac{c}{\sin 73}$

(3) $a = \frac{10 \cdot \sin 41}{\sin 66} = 7{,}2$

(4) $c = \frac{10 \cdot \sin 73}{\sin 66} = 10{,}5$

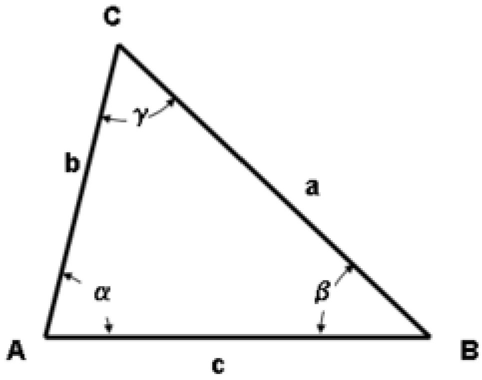
Voorbeeld 2

Maak opgave 20abc uit boek.

PARAGRAAF 3.3 : DE COSINUSREGEL

REGEL 2 : DE COSINUSREGEL

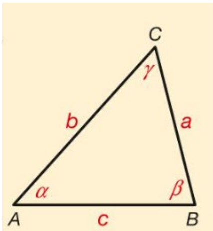
- $a = BC \quad b = AC \quad c = AB$ (de letter die er niet in zit)
- $\angle A = \alpha \quad \angle B = \beta \quad \angle C = \gamma$
- Dan geldt de cosinusregel : $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(\alpha)}$
- Let op : de hoek (α) moet de hoek zijn <u>tegenover</u> de zijde !!!!



VOORBEELD 1

Gegeven is ΔABC met $a = 6,\ b = 8\ en\ c = 9$

Bereken β in graden nauwkeurig.



OPLOSSING 1

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$8^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos\beta$$
$$64 = 117 - 108 \cdot \cos\beta$$
$$108 \cdot \cos\beta = 53$$
$$\cos\beta = \frac{53}{108}$$
$$\beta = 61^\circ \quad (\cos^{-1}(53:108))$$

VOORBEELD 2

MAAK OPGAVE 36 UIT BOEK.

PARAGRAAF 3.4 : VERGELIJKINGEN IN DE MEETKUNDE

LES 1 HERLEIDEN VAN WORTELS

THEORIE WORTELS HERLEIDEN

Regels voor wortels herleiden

(1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{ab}$

(2) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$

(3) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(4) Wortel in de noemer mag nooit blijven staan

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

VOORBEELD 1

Herleid

a. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} =$

b. $5\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{7} =$

c. $\frac{18\sqrt{12}}{3\sqrt{2}} =$

d. $\sqrt{\frac{11}{2}} =$

e. $\sqrt{3\frac{1}{5}} =$

OPLOSSING 1

a. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{7 \cdot 3} = \sqrt{21}$

b. $5\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{7} = 15\sqrt{49} = 15 \cdot 7 = 105$

c. $\frac{18\sqrt{12}}{3\sqrt{2}} = 6\sqrt{\frac{12}{2}} = 6\sqrt{6}$

d. $\sqrt{\frac{11}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{22}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{22}$

e. $\sqrt{3\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{80}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{80}$

THEORIE KWADRATEN UIT WORTELS HALEN

(1) Schrijf de kwadraten tot en met 10 op, van achter naar voor (behalve 1 kwadraat)
100, 81, 64, 49, 36, 25,16, 9, 4

(2) Loop van links naar rechts door de rij en kijk door welk getal je het eerst kunt delen (met hele uitkomst).

(3) Splits het getal als vermenigvuldiging van het gevonden kwadraat en het andere getal.

VOORBEELD 2

Kwadraten eruit halen

a. $\sqrt{50} =$

b. $\sqrt{108} =$

c. $\sqrt{80} + \sqrt{20} =$

d. $\sqrt{8a^2} + a\sqrt{2} =$

OPLOSSING 2

a. $\sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

b. $\sqrt{108} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

c. $\sqrt{80} + \sqrt{20} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

d. $\sqrt{8a^2} + a\sqrt{2} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{a^2} + \sqrt{2} \cdot a = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} \cdot a + \sqrt{2} \cdot a$

$= 2\sqrt{2} \cdot a + \sqrt{2} \cdot a = 3\sqrt{2} \cdot a = 3a\sqrt{2}$

LES 2 WORTELVERGELIJKINGEN

THEORIE WORTELVERGELIJKINGEN

Er zijn twee soorten wortelvergelijkingen in deze paragraaf :

(1) Eén x in de vergelijking
Aanpak : Haal de x naar links en de getallen naar rechts.
(2) Twee x-en in de vergelijking
Aanpak : Haal de x-en naar links en haal de x buiten haakjes (OOHH).

VOORBEELD 1

A. $x\sqrt{3} + 5 = \sqrt{10}$

B. $x\sqrt{3} = 6 + 2x$

OPLOSSING 1

A. $x\sqrt{3} + 5 = \sqrt{10}$

$x\sqrt{3} = \sqrt{10} - 5$

$x = \frac{\sqrt{10}-5}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{\sqrt{10}-5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{30}-5\sqrt{3}}{3}$

$x = \frac{1}{3}\sqrt{30} - \frac{5}{3}\sqrt{3}$

B. $x\sqrt{3} = 6 + 2x$

$x\sqrt{3} - 2x = 6$

$x(\sqrt{3} - 2) = 6$

$x = \frac{6}{\sqrt{3}-2}$

OPMERKING

Als er alleen een wortel staat, moet je die weghalen (Vb $\frac{6}{\sqrt{3}}$).

Maar als er een wortel min een getal staat, kun je dit laten staan (Vb $\frac{6}{\sqrt{3}-2}$).

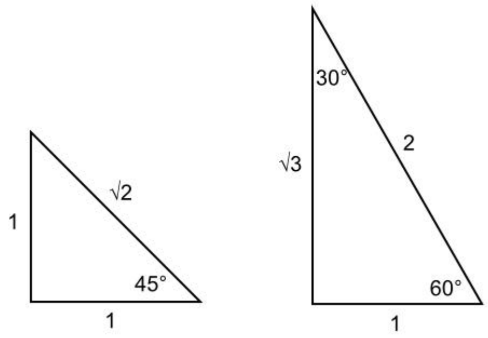
LES 3 : BIJZONDERE DRIEHOEKEN

DEFINITIE BIJZONDERE DRIEHOEKEN

Er zijn twee bijzondere driehoeken die vaak terugkomen (afbeelding staat eronder):

(1) De 45-45-90 driehoek
De verhouding van de zijden is $1 : 1 : \sqrt{2}$
(laatste is schuine zijde)

(2) De 30-60-90 driehoek
De verhouding van de zijden is $1 : \sqrt{3} : 2$
(laatste is schuine zijde)



Je kunt dit vaak gebruiken om eenvoudig bepaalde zijden uit te rekenen.

VOORBEELD 1

Gegeven is trapezium ABCD met loodlijnen BE en CF op AB. Gegeven is ook dat BE = 8 en $\angle A = 60$ en $\angle D = 45$

a. Bereken de lengte van AE en FD

De oppervlakte van EFCB is 5 keer de oppervlakte van AEB.

b. Bereken de lengte van BC.

OPLOSSING 1

a. AEB is een 30-60-90 driehoek.

Dus $AE : EB : AB = 1 : \sqrt{3} : 2 = AE : 8 : AB$

$AE = \frac{8}{\sqrt{3}} \times 1 = \frac{8}{\sqrt{3}}$

CFD is een 45-45-90 driehoek. Dus $FD = CF = 8$.

b. $AB = 2AE = 2 \times \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}}$

$Opp \ \triangle ABE = \frac{1}{2} \times AE \times AB = \frac{1}{2} \times \frac{16}{\sqrt{3}} \times \frac{8}{\sqrt{3}} = 21\frac{1}{3}$

$Opp \ EFCB = 5 \times \triangle ABE = 5 \times 21\frac{1}{3} = 106\frac{2}{3}$

$EF = 106\frac{2}{3} : 8 = 13\frac{1}{3}$